

DOI: 10.7652/xjtuxb201701009

采用 Udwadia-Kalaba 理论的微振动隔振平台研究

黄康, 孙顺强, 葛新方, 王卫荣, 刘伟伟, 袁伟
(合肥工业大学机械与汽车工程学院, 230009, 合肥)

摘要: 针对微制造平台的隔振问题, 建立基于 Udwadia-Kalaba 方程的动力学模型, 其可以在不引入拉格朗日乘数等额外参数的情况下进行求解。将微振动平台的振动位移作为系统约束, 建立微振动隔振平台的离散化模型, 并在主动隔振与被动隔振的混合机制下进行微振动平台隔振系统的多体动力学分析与仿真; 用 Udwadia-Kalaba 方程建立了驱动条件的求解方法以满足系统约束, 基于约束条件建立微振动隔振平台的动力学模型, 且通过 Matlab 语言进行仿真计算。研究结果表明: 根据仿真得到了 8 个自由度方向的约束力矩, 由此可以求得致动器所要求的竖直方向力的大小; 在 4 个质点所受噪声干扰相同的条件下, 微振动离散化模型 4 个致动器所需的约束力保持一致, 而且可以达到良好的减振作用。

关键词: Udwadia-Kalaba 方程; 系统约束; 微振动; 隔振平台

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)01-0051-08

Research on Micro-Vibration Isolation Platform Based on
Udwadia-Kalaba Theory

HUANG Kang, SUN Shunqiang, GE Xinfang, WANG Weirong, LIU Weiwei, YUAN Wei
(School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Focusing on vibration isolation for micro manufacturing platform, a dynamic model is established based on Udwadia-Kalaba equations, which can be solved without introducing Lagrange multiplier or other additional parameters. The discrete model of micro-vibration isolation vibration platform is constructed by treating the vibration displacement as a system restraint, and the multi-body dynamics analysis and simulation of micro-vibration platform are carried out following the mixing mechanism of the active and passive vibration isolation. To satisfy the system constraints, the driving conditions for Udwadia-Kalaba equations are introduced. The dynamic model of the vibration isolation platform can be solved under the constraint conditions and numerically simulated by Matlab. The constraint torques of 8 DOFs are thus achieved and the needed vertical forces for actuators can be obtained. The proposed discrete model of the micro-vibration is effective as the noises on four mass points are same.

Keywords: Udwadia-Kalaba equation; system constraints; micro-vibration; vibration platform

近年来,随着科技的发展和设备制造精度要求越来越高,微振动隔振系统的研究已成为重要的研究课题。国内外针对隔振问题已经进行了大量的研

究,现阶段主要采用以空气弹簧为主的被动隔振技术和以机器为主的主动隔振技术相结合的混合隔振技术来达到减振的目的。张春良等利用仿生学原理

设计了微振动隔振平台^[1-5];Udwadia 等提出了一种简明的方程^[6],有助于理解拉格朗日力学的多体系统运动理论^[7-17]。国内外许多学者利用 Udwadia-Kalaba 原理进行动力学研究^[7-17]。Chen 根据 Udwadia 理论,提出了较为系统的机械系统伺服约束控制概念,实现了利用伺服控制来施加约束力的设计^[12];Bajodah 等研究了一些对 Udwadia-Kalaba (U-K)方程伺服控制中的数学运算问题;Schutte 在 U-K 方程的基础上,研究了完整约束和非完整约束下非线性机械系统的控制问题,提出了一种状态反馈控制器并进行理论分析与仿真研究等。

针对微振动隔振平台的振动控制技术包含了多种控制方法^[18-21]。关于不确定复杂系统的多体动力学建模与控制问题,现有技术成果表明可以采用 PID 或者综合运用多种控制方式对隔振平台进行主动隔振控制,U-K 理论与这些常规的方法具有本质的区别。U-K 方程根据系统约束力,分析求解得到约束力矩,最终求得主动控制力;其控制力的施加方式是通过致动器作用在双层隔振平台上,从而减小了振动幅度,实现了对微振动隔振平台的减振作用。

本文针对微制造平台的隔振问题建立了基于 Udwadia-Kalaba 方程的动力学模型,将微振动平台的振动位移作为系统约束建立了微振动隔振平台的离散化模型,并在主动隔振与被动隔振的混合机制下进行微振动平台隔振系统的多体动力学分析与仿真。

1 机械约束系统的动力学模型

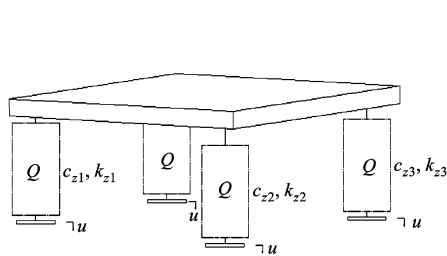
无外力的机械系统的运动方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \quad (1)$$

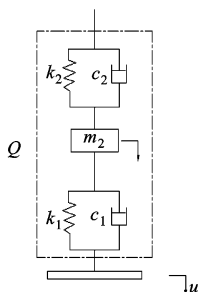
式中: $\mathbf{q}$ 可描述系统的自由度,为 n 维向量; $\mathbf{M}$ 为 $n \times n$ 维对称的正定矩阵; $\mathbf{Q}$ 为广义主动力矩阵; t 为时间。

无外力约束机械系统的加速度表达式为

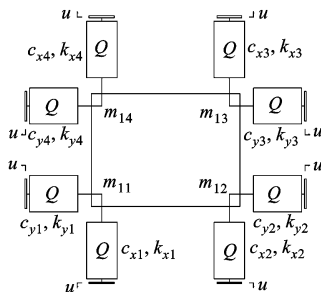
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \quad (2)$$



(a) x 和 y 方向简化模型



(b) z 方向简化模型



(c) Q 部位详细模型

图1 微振动隔振平台模型

在无外力约束的机械系统上施加 m 个约束,则

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ 为 $m \times n$ 维的矩阵; $\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ 为 m 维的列阵。

式(1)和式(3)相互结合,从而使得系统的运动方程变为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + \mathbf{Q}_c(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (5)$$

式中: $\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ 为无约束部分; $\mathbf{Q}_c(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ 为约束部分。对于此方程的求解,Udwadia 等利用了虚位移和广义逆等原理得到了 U-K 动力学方程,于是约束系统所受的约束力矩

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (6)$$

显然,该约束力表达式中并没有出现拉格朗日常数等额外参数,从而减少了冗杂的计算量。

2 主、被动隔振模型

微振动隔振平台主要由致动器、空气弹簧、平台、控制系统以及传感器等组成。被动隔振装置的固有频率由于制造的原因,不能降低到所需要的频率,所以仅仅使用简单的被动隔振装置,对隔离超低频的振动信号将会很困难。为了增加隔振装置对低频率信号的隔离作用,采用主动隔振与被动隔振的混合隔振机制来改善隔振效果,达到减振的目的。本文平台中质量为 m ;各边的边长为 $L(m)$;每个空气弹簧各个方向所具有的刚度和阻尼相同,分别为 k_x, k_y, k_z 和 c_x, c_y, c_z ;平台的质心与空气弹簧的中心基本重合;简化模型具有6个自由度,分别是 $x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$,其中 θ_x 为平台沿 x 轴的转角, θ_y 为平台沿 y 轴的转角, θ_z 为平台沿 z 轴的转角,具体的模型如图1所示。

2.1 微振动隔振平台整体模型

根据图1模型,微振动被动隔振平台整体模型的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x(\ddot{x}_0 - \ddot{x}_1) + k_x(x_0 - x_1) \\ c_y(\ddot{y}_0 - \ddot{y}_1) + k_y(y_0 - y_1) \\ c_z(\ddot{z}_0 - \ddot{z}_1) + k_z(z_0 - z_1) \\ -l^2(c_z\ddot{\theta}_x + k_z\theta_x) \\ -l^2(c_z\ddot{\theta}_y + k_z\theta_y) \\ -l^2((c_x + c_y)\ddot{\theta}_z + (k_x + k_y)\theta_z) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: J_x 、 J_y 、 J_z 分别为 x 、 y 、 z 方向的转动惯量; x_0 、 y_0 、 z_0 分别为 x 、 y 、 z 方向的地基扰动; x_1 、 y_1 、 z_1 分别为 x 、 y 、 z 方向的振动位移; l 为平台边长的 $1/2$ 。

微振动隔振平台在主、被动混合隔振机制下的动力学方程可以参考式(4)写成下列形式

$$M\ddot{q} = Q + CF \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -l & l & -l & -l & l & l \\ -l & -l & l & l & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$F = [F_{x1}, F_{x2}, F_{y1}, F_{y2}, F_{z1}, F_{z2}, F_{z3}, F_{z4}]^T \quad (10)$$

式中: Q 为无约束部分; F 为系统约束力; C 为 m 维矢量; F_{x1} 、 F_{x2} 、 F_{y1} 、 F_{y2} 、 F_{z1} 、 F_{z2} 、 F_{z3} 、 F_{z4} 为不同方向各个致动器所需力。

微振动隔振平台的整体模型是一个关于 x 、 y 、 z 轴对称的结构,对整体结构建立动力学模型较为复杂,且各个隔振部位的整体刚度与阻尼也不能简单综合,针对这种情况,将微振动隔振模型进行离散化处理建立微振动隔振平台的离散化模型。

2.2 微振动隔振平台的离散化模型

模型的离散化以转化前后系统的静态性能和动态性能相当为前提条件,即转化前后同时满足质量的静代换条件和动代换条件。设平台的质量总和为 m ,绕通过质心所在轴的转动惯量为 J_x 、 J_y 、 J_z ,转化后模型每个点对应的质量为 m_{1i} ,其中 $i=1,2,3,4$,相应关系式为

$$\left. \begin{aligned} m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} &= m \\ l(m_{11} + m_{12}) &= l(m_{13} + m_{14}) \\ l^2(m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14}) &= J_x + J_y + J_z \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由振动平台的对称性可以得知

$m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = m/4$
每一个质点的等效模型如图 2 所示。

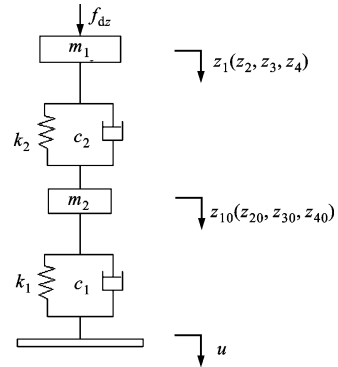


图 2 z 方向各质点的等效模型

微振动隔振平台关于 x 、 y 、 z 三轴对称, x 、 y 、 z 3 个方向针对随机振动的处理方法类似, x 、 y 方向等效离散模型与 z 方向相同,为双层主、被动混合隔振平台,故 x 、 y 、 z 这 3 个方向的模型分析只需针对一个方向即可。本文分析 z 方向(竖直方向)的振动模型。从图 1c 中可知,每一点具有 2 个自由度,故 4 个等效质点总共有 8 个自由度,分别是 z_1 、 z_{10} 、 z_2 、 z_{20} 、 z_3 、 z_{30} 、 z_4 、 z_{40} 。针对 4 个质点,整体的动力学模型可以简化为 4 个质点的动力学模型综合,即

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z}_1, \ddot{z}_{10}, \ddot{z}_2, \ddot{z}_{20}, \ddot{z}_3, \ddot{z}_{30}, \ddot{z}_4, \ddot{z}_{40} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_2(\ddot{z}_{10} - \ddot{z}_1) + k_2(z_{10} - z_1) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{10} - k_1z_{10} + c_2(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_{10}) + k_2(z_1 - z_{10}) + c_1\dot{u} + ku \\ c_2(\ddot{z}_{20} - \ddot{z}_2) + k_2(z_{20} - z_2) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{20} - k_1z_{20} + c_2(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_{20}) + k_2(z_2 - z_{20}) + c_1\dot{u} + ku \\ c_2(\ddot{z}_{30} - \ddot{z}_3) + k_2(z_{30} - z_3) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{30} - k_1z_{30} + c_2(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_{30}) + k_2(z_3 - z_{30}) + c_1\dot{u} + ku \\ c_2(\ddot{z}_{40} - \ddot{z}_4) + k_2(z_{40} - z_4) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{40} - k_1z_{40} + c_2(\ddot{z}_4 - \ddot{z}_{40}) + k_2(z_4 - z_{40}) + c_1\dot{u} + ku \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [f_{z1} \ f_{z2} \ f_{z3} \ f_{z4}]^T \quad (12)$$

将式(12)写成式(4)的形式,可得

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = [\ddot{z}_1, \ddot{z}_{10}, \ddot{z}_2, \ddot{z}_{20}, \ddot{z}_3, \ddot{z}_{30}, \ddot{z}_4, \ddot{z}_{40}]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_2(\ddot{z}_{10} - \ddot{z}_1) + k_2(z_{10} - z_1) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{10} - k_1\ddot{z}_{10} + c_2(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_{10}) + k_2(z_1 - z_{10}) + c_1\ddot{u} + k_1u \\ c_2(\ddot{z}_{20} - \ddot{z}_2) + k_2(z_{20} - z_2) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{20} - k_1\ddot{z}_{20} + c_2(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_{20}) + k_2(z_2 - z_{20}) + c_1\ddot{u} + k_1u \\ c_2(\ddot{z}_{30} - \ddot{z}_3) + k_2(z_{30} - z_3) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{30} - k_1\ddot{z}_{30} + c_2(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_{30}) + k_2(z_3 - z_{30}) + c_1\ddot{u} + k_1u \\ c_2(\ddot{z}_{40} - \ddot{z}_4) + k_2(z_{40} - z_4) + f_z \\ -c_1\ddot{z}_{40} - k_1\ddot{z}_{40} + c_2(\ddot{z}_4 - \ddot{z}_{40}) + k_2(z_4 - z_{40}) + c_1\ddot{u} + k_1u \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [f_{z1} \ f_{z2} \ f_{z3} \ f_{z4}]^T \quad (16)$$

3 系统约束

隔振平台的系统约束可以写成式(3)的形式,根

据微振动隔振平台内部要求,通过 Udwadia-Kalaba 方程得到 $\mathbf{Q}_c$ 表达式,即

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{a}) \quad (17)$$

式中: $\mathbf{U}$ 为力矩阵。

根据式(17)可知,此处

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = [f_{z1}, f_{z2}, f_{z3}, f_{z4}]^T$$

最终输入之力

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^+ \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{a}) \quad (18)$$

4 微制造振动平台的系统约束模型

对于微制造隔振平台的整体模型,当受到外界噪声扰动时,隔振平台能在整体模型 6 个方向的位移为 0,这样对加工精度的影响最小,即 $x=y=z=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$ 。模型离散化后 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ 分别为 m_1, m_2, m_3 在 x, y, z 方向的振动位移,其离散化模型的自由度与整体模型的自由度之间具有如下函数关系

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2x = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_2 &= 2y = y_3 + y_4 \\ z_1 + z_4 &= 2z = z_2 + z_3 \\ \tan\theta_x &= \frac{z_3 + z_4}{2l} \\ \tan\theta_y &= \frac{z_1 + z_3}{2l} \\ \cos\theta_z &= 2 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{2l^2} = 2 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2l^2} = \\ &2 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2l^2} = 2 - \frac{x_4^2 + y_4^2}{2l^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$x=y=z=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$ 时,通过式(19)计算可得

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = \\ y_4 &= z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0 \end{aligned}$$

最终确定离散化模型 z 方向的 8 个自由度的约束形式为

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z_2 = z_3 = z_4 = 0 \\ z_{10} &= -u \\ z_{20} &= -u \\ z_{30} &= -u \\ z_{40} &= -u \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)对时间求二阶导数,可以得到式(20)的二阶约束形式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \ddot{z}_2 = \ddot{z}_3 = \ddot{z}_4 = 0 \\ \ddot{z}_{10} &= -\ddot{u} \\ \ddot{z}_{20} &= -\ddot{u} \\ \ddot{z}_{30} &= -\ddot{u} \\ \ddot{z}_{40} &= -\ddot{u} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)可以写成式(3)系统受约束的形式

$$A(q,\dot{q},t)\ddot{q} = b(q,\dot{q},t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

$$\ddot{q} = [\ddot{z}_1, \ddot{z}_{10}, \ddot{z}_2, \ddot{z}_{20}, \ddot{z}_3, \ddot{z}_{30}, \ddot{z}_4, \ddot{z}_{40}]^T$$

$$b = [0, -\ddot{u}, 0, -\ddot{u}, 0, -\ddot{u}, 0, -\ddot{u}]^T$$

其中微振动隔振平台各自由度的初始条件如下

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z_2 = z_3 = z_4 = 0 \\ z_{10} &= 1.027\ 942\ 388 \\ z_{20} &= 1.027\ 942\ 388 \\ z_{30} &= 1.027\ 942\ 388 \\ z_{40} &= 1.027\ 942\ 388 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0 \\ \dot{z}_{10} &= 72.737\ 992\ 2 \\ \dot{z}_{20} &= 72.737\ 992\ 2 \\ \dot{z}_{30} &= 72.737\ 992\ 2 \\ \dot{z}_{40} &= 72.737\ 992\ 2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

5 仿真试验与结果分析

针对微振动隔振平台的系统约束,通过 Matlab 软件进行模拟仿真试验得到所需力矩与力。该软件中采用四阶龙格库塔法完成高阶微分方程组的求解。仿真中初始条件的设定参照了一种微制造仪器的隔振平台,微制造仪器的隔振平台简化为图 1 模型,该模型离散化后等效为图 2 中的双层隔振平台。仿真参数见表 1。

表 1 仿真参数

仿真参数	数值	仿真参数	数值
m_1/kg	400	$k_2/\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	200
m_2/kg	100	$c_1/\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}^{-1}$	100
$k_1/\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	300	$c_2/\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}^{-1}$	100

注:下标 1 表示“上”;下标 2 表示“下”。

微振动隔振平台的噪声扰动信号 u 由多个方面构成,包含地基扰动和外界环境扰动,主要是通过微振动隔振平台所位于的地基上传播到精密加工设备上的,如图 2 中的 u 。本文以白噪声随机信号为例进行仿真分析,具体是由 randn 函数生成的随机数组成的随机信号 u ,如图 3 所示。

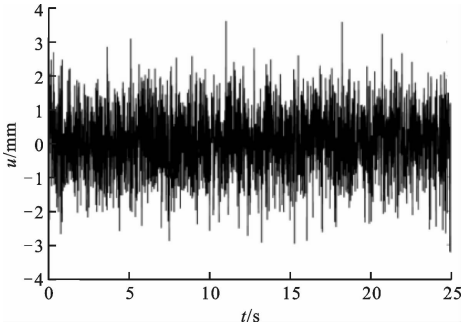


图 3 噪声信号 u 随时间的变化

根据式(17)可得到所需的 8 个力矩,分别是 $z_1, z_{10}, z_2, z_{20}, z_3, z_{30}, z_4, z_{40}$ 。微振动隔振平台是关于 x, y 轴的对称结构,其单质点的振动位移模型类似,4 个点的位移约束一致,故仿真得到的曲线保持一致。图 4 为 z_1 的位移变化曲线,其值保持为 0;图 5 为 z_{10} 的位移变化曲线,其与干扰信号变化大致相同。 z_2, z_3, z_4 及 z_{20}, z_{30}, z_{40} 的位移变化与 z_1 及 z_{10} 相同,文中不再给出。

根据图 4 和图 5 可知:系统约束是满足减振要

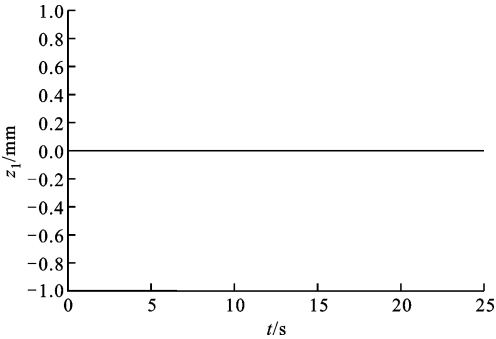


图 4 z_1 的位移变化

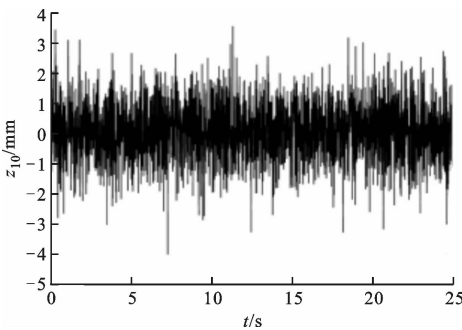


图 5 z_{10} 的位移变化

求的,但是这与器材的精度有一定的关系;仿真的位移约束与实际位移约束基本一致。

图6~图13为 z_1 、 z_{10} 、 z_2 、 z_{20} 、 z_3 、 z_{30} 、 z_4 、 z_{40} 这8个自由度所需力矩,对应于 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 、 τ_4 、 τ_5 、 τ_6 、 τ_7 、 τ_8 。

根据仿真得到的8个自由度的约束力矩,可以

求得致动器所要求的竖直方向力的大小。理论上,微振动隔振平台为对称结构,离散化模型各个质点的受力及约束保持一致,即4个质点力的变化曲线保持一致,如图14~17所示。图18是随机激励与 z_{10} 的对比曲线,满足系统约束。

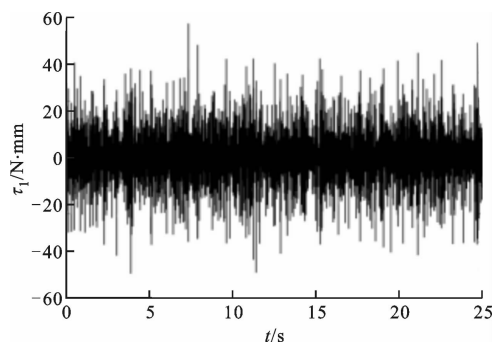


图6 约束力矩 τ_1 的变化曲线

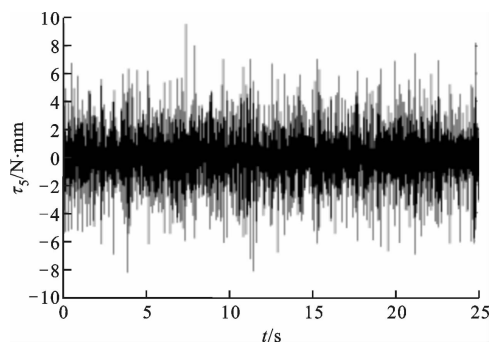


图10 约束力矩 τ_5 的变化曲线

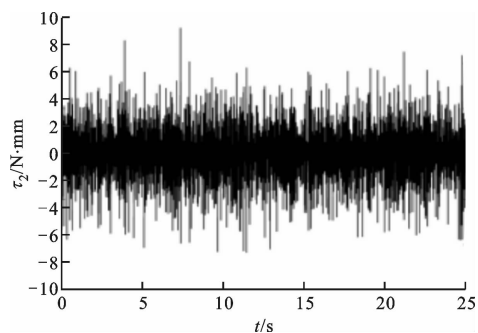


图7 约束力矩 τ_2 的变化曲线

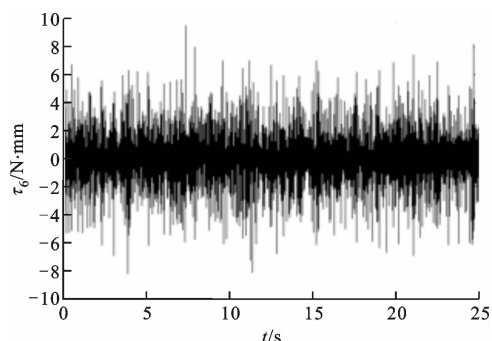


图11 约束力矩 τ_6 的变化曲线

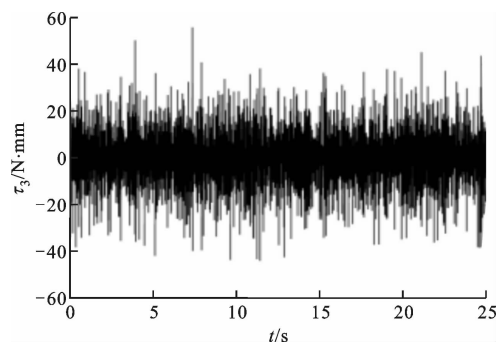


图8 约束力矩 τ_3 的变化曲线

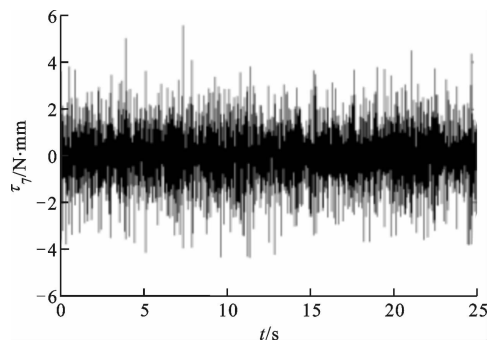


图12 约束力矩 τ_7 的变化曲线

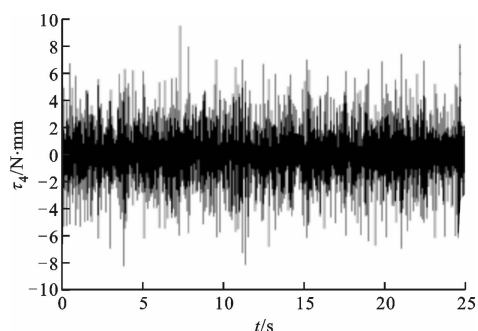


图9 约束力矩 τ_4 的变化曲线

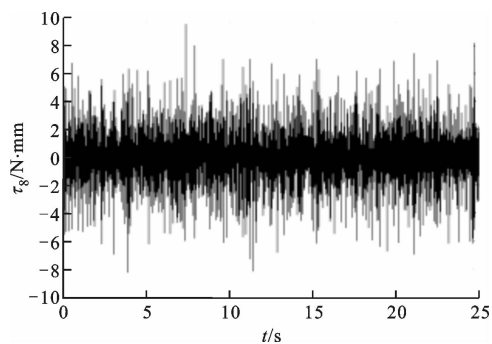


图13 约束力矩 τ_8 的变化曲线

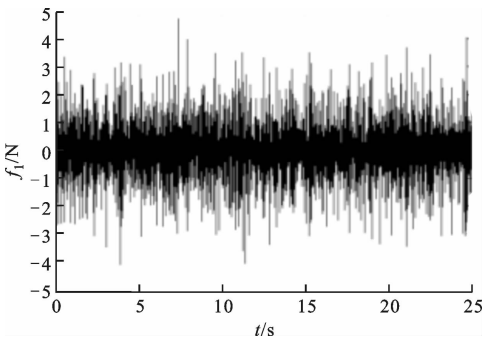


图 14 约束力 f_1 的变化曲线

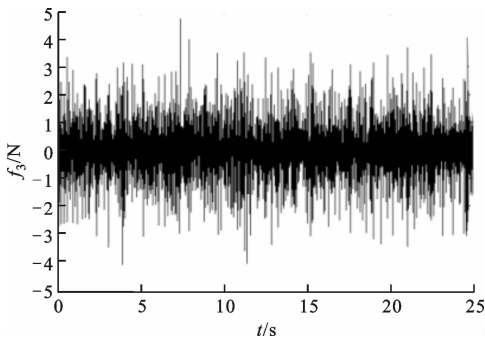


图 16 约束力 f_3 的变化曲线

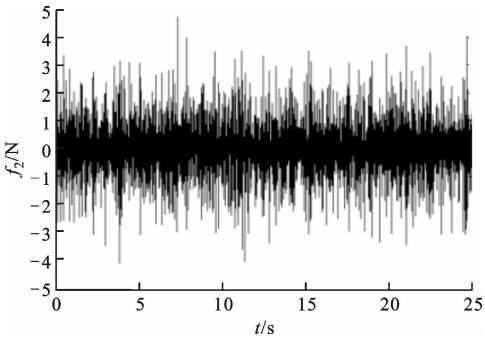


图 15 约束力 f_2 的变化曲线

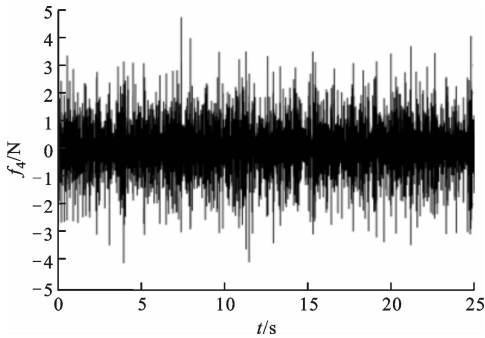


图 17 约束力 f_4 的变化曲线

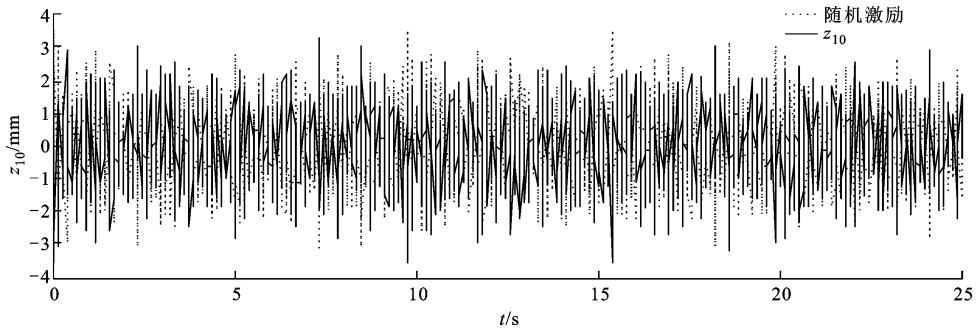


图 18 随机激励与 z_{10} 对比曲线

仿真结果表明,基于 U-K 方程所建立的微振动离散化模型与设想的结果一致,在 4 个质点所受噪声干扰相同的条件下,4 个致动器所需的约束力保持一致,而且可以达到良好的减振作用。

6 结 论

通过仿真结果可知,U-K 理论可以应用于解决多体振动方面的问题,与拉格朗日乘子法相比无需确定乘子。

本文应用 U-K 理论研究微振动隔振平台多体动力学方面的问题,并得到满足所要求的系统约束,进而满足整体隔振平台的要求。该理论方法能较好地应用于微振动隔振平台的减振,结果如下。

(1)采用主、被动隔振技术,建立 6 个自由度微振动隔振平台,可以起到良好的隔振作用;振动系统

的离散化将一个非常复杂的系统简化为 4 个节点的模型,利用 U-K 理论通过约束求解致动器所需要施加的力,简化了计算过程。

(2)在约束控制中,计算过程比较繁琐,对伺服控制器的要求较高,参数较多,所以本文将一部分参数进行了简化处理。

(3)模拟计算是通过计算机进行的,在模型的简化过程中对一些因素进行了适当简化,故与实际的模型肯定存在着一定的误差。

(4)将微振动隔振平台进行离散化,将离散化模型进行综合考虑,最终得到所需的系统约束。微振动隔振平台应用于高精度制造设备,可采用主、被动结合的混合隔振技术。隔振元件的加工精度对隔振有一定的影响,但高精度制造设备在设计之初选用的皆为高精度的隔振元件,故影响很小。

U-K 理论还可以给出一个明确、清晰的运动方程,适用于可积分或不可积分约束、理想或非理想约束系统,也适用于奇异质量矩阵系统,这为求解多体动力学提供了一种新的方法。

参考文献:

- [1] 张春良. 微制造平台振动主动控制研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2003: 1-23.
- [2] 胡强, 程耀东, 齐津. 主动控制的高精度隔振平台的仿真 [J]. 浙江大学学报, 1999, 33(2): 209-213.
HU Qiang, CHENG Yaodong, QI Jin. Active control and simulation of isolation platform with high accuracy [J]. Journal of Zhejiang University, 1999, 33(2): 209-213.
- [3] 张春良, 梅德庆, 陈子辰. 双层主动隔振系统的动力学研究 [J]. 中国机械工程, 2003, 14(14): 1232-1235.
ZHANG Chunliang, MEI Deqing, CHEN Zichen. Research on dynamics of two-layer active vibration isolation system [J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(14): 1232-1235.
- [4] 张春良, 梅德庆, 陈子辰. 微制造隔振平台振动的模糊广义预测控制 [J]. 机械工程学报, 2007, 43(12): 194-202.
ZHANG Chunliang, MEI Deqing, CHEN Zichen. Fuzzy generalized predictive control of microvibration isolation system for a micro-manufacturing platform [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(12): 194-202.
- [5] 张春良, 梅德庆, 陈子辰. 微制造平台混合隔振的动力学研究 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2003, 37(4): 465-470.
ZHANG Chunliang, MEI Deqing, CHEN Zichen. Research on dynamics of hybrid vibration isolate on system for a micro-manufacturing platform [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2003, 37(4): 465-470.
- [6] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion [J]. Mathematical and Physical Sciences, 1992, 439(9): 407-410.
- [7] HUANG J, CHEN Y H, ZHONG Z H. Udwadia-Kalaba approach for parallel manipulator dynamics [J]. J Dyn Syst Meas Control, 2013, 135: 061003.
- [8] ZHEN Shengchao, ZHAO Han, HUANG Kang, et al. On Kepler's law: application of the udwa dia-Kalaba theory [J]. Scientia Sinica, 2014, 44(1): 24-31.
- [9] UDWADIA F E, KALABA R E. On the foundations of analytical dynamics [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2002, 37(16): 1079-1090.
- [10] CHEN Y H. Mechanical systems under servo constraints: the Lagrange's approach [J]. Mechatronics, 2005, 15: 317-337.
- [11] CHEN Y H. Equations of motion of mechanical systems; given force depends on constraint force [J]. Mechatronics, 1999, 9: 411-428.
- [12] CHEN Y H. Equations of motion of mechanical systems under servo constraints: the Maggi approach [J]. Mechatronics, 2008, 18: 208-217.
- [13] UDWADIA F E, KALABA R E. Nonideal constraints and Lagrangian dynamics [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2000, 13(1): 17-22.
- [14] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion [J]. Proc Royal Societ, 1992, 439: 407-410.
- [15] UDWADIA F E, KALABA R E. Explicit equations of motion for mechanical systems with non-ideal constraints [J]. Appl Mech, 2001, 68: 462-467.
- [16] UDWADIA F E, KALABA R E. On constrained motion [J]. Appl Math Comput, 2005, 164: 313-320.
- [17] UDWADIA F E, PHOHOMSIRI P. Explicit equations of motion for constrained mechanical systems with singular mass matrices and applications to multi-body dynamics [J]. Proc Royal Soci, 2006, 462: 2097-2117.
- [18] JENKINS M D. Active isolation of periodic machinery vibration [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 116(1): 117-140.
- [19] 马小东, 张涛. 高精密仪器平台振动控制的研究现状和发展 [J]. 装备制造技术, 2008(5): 119-120.
MA Xiaodong, ZHANG Tao. The research current situation and development of platform libration control in high-accurate instrument [J]. Equipment Manufacturing Technology, 2008(5): 119-120.
- [20] 王玲玲, 李耀刚, 陈冠国. 振动主动控制技术的研究现状及发展趋势 [J]. 农机化研究, 2005(5): 30-32.
WANG Lingling, LI Yaogang, CHEN Guanguo. Present research status and development trend of active vibration control technology [J]. Journal of Agricultural Mechanization Research, 2005(5): 30-32.
- [21] NAKAMURA Y, NAKAYAMA M, MASUDA K, et al. Development of active 6-DOF micro-vibration control system using giant magneto strictive actuator [C] //Proceedings of the SPIE Conference on Smart Systems for Bridges, Structures and Highways, Newport Beach. Washington, DC, USA: SPIE, 1999: 229-240.

(编辑 苗凌)